



Département d'Electricité, Electronique et Informatique  
(Institut Montefiore)

Notes théoriques du cours ELEC0029

*Electric Power System Analysis*

# **La machine synchrone**

## **(modèle détaillé)**

Thierry VAN CUTSEM

directeur de recherches FNRS  
professeur adjoint ULg

février 2017

*Ce chapitre est la prolongation du chapitre du cours ELEC0014 traitant de la machine synchrone.*

*Un modèle plus détaillé est considéré. Il est abondamment utilisé dans les études dynamiques. Il inclut l'effet des amortisseurs et s'applique aussi bien aux machines à rotor lisse qu'à celles à pôles saillants.*

*Ce modèle repose sur la transformation de Park, utilisée aussi dans l'analyse d'autres composants de réseaux.*

## **1 Modélisation au moyen de circuits magnétiquement couplés**

Nous allons représenter la machine synchrone par un certain nombre d'enroulements, magnétiquement couplés, dont certains sont en mouvement.

Le modèle électrique d'une machine synchrone ne dépend pas du nombre  $p$  de paires de pôles qu'elle comporte (évidemment les valeurs de certains paramètres changent avec  $p$ , p.ex. le moment d'inertie et l'énergie cinétique des masses tournantes). Pour des raisons de simplicité, nous considérerons donc une machine à une seule paire de pôles ( $p = 1$ ).

### **1.1 Signification des enroulements**

La machine idéalisée que nous allons étudier est représentée à la figure 1. Le stator est muni de trois enroulements repérés  $a$ ,  $b$  et  $c$ , décalés de 120 degrés. Le rotor comporte un certain nombre d'enroulements équivalents, répartis selon deux axes : *l'axe direct* qui coïncide avec celui de l'enroulement d'excitation et *l'axe en quadrature*, perpendiculaire au précédent. Nous plaçons arbitrairement l'axe en quadrature *en retard* sur l'axe direct par rapport au sens de rotation.

Nous avons donné au rotor une forme en pôles saillants mais les développements qui suivent s'appliquent également à une machine à rotor lisse. Pour celle-ci, il suffit de considérer que le rotor présente une parfaite symétrie de révolution.

Le nombre d'enroulements rotoriques caractérise le degré de raffinement du modèle. Toutefois, il ne faut pas perdre de vue qu'un modèle plus sophistiqué requiert davantage de données pour tous les paramètres qui y interviennent et que le gain est marginal si les données ne sont pas fiables. Cette remarque prend tout son sens si l'on considère qu'en pratique seul le circuit d'excitation est accessible aux instruments de mesure. Les paramètres (résistances, inductances, ...) des autres circuits sont déterminés de manière indirecte (p.ex. réponse de la machine lors d'un essai en court-circuit, réponse en fréquence, identification par calcul numérique).

Compte tenu de ces considérations, le modèle le plus répandu pour la machine synchrone est celui à quatre ou trois enroulements rotoriques. L'axe direct comporte l'enroulement d'excitation,

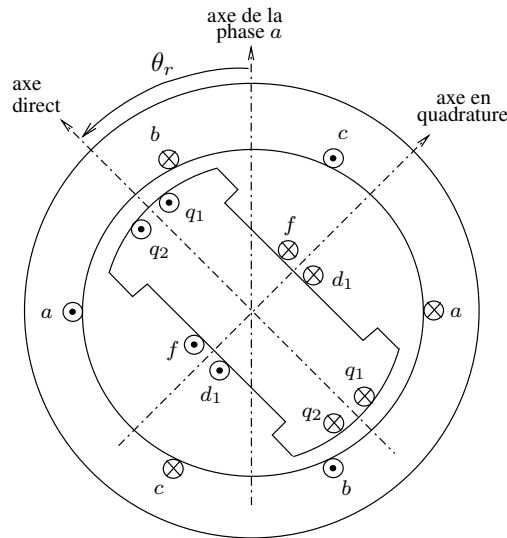


FIGURE 1 – machine synchrone idéalisée

désigné par  $f$ <sup>1</sup> et un circuit équivalent désigné par  $d_1$ <sup>2</sup>. Ce dernier représente l'effet des amortisseurs. L'axe en quadrature comporte deux enroulements, désignés par  $q_1$  et  $q_2$ <sup>3</sup>. L'un représente l'effet des courants de Foucault induits dans la masse du rotor, l'autre tient compte des amortisseurs. Toutefois, dans les machines à pôles saillants, le rotor est généralement constitué de tôles et les courants de Foucault sont négligeables. Pour ces machines, on ne considère donc qu'un seul enroulement ( $q_2$ ) dans l'axe en quadrature.

Les développements qui suivent s'appliquent au cas général d'une machine à quatre enroulements rotoriques. Le modèle à trois enroulements s'en déduit par des simplifications assez évidentes.

Notons enfin que l'enroulement d'excitation est soumis à une tension  $v_f$  tandis que les circuits  $d_1, q_1$  et  $q_2$  sont court-circuités en permanence.

## 1.2 Relations tensions-courants-flux

Comme nous nous intéressons principalement à des générateurs, nous adoptons la convention générateur dans chaque enroulement statorique. En revanche, étant donné qu'on fournit de la puissance à l'enroulement d'excitation, nous y adoptons la convention moteur. Rappelons que ces choix sont arbitraires ; leur mérite est de conduire à des puissances positives pour un générateur en régime établi.

Pour les enroulements statoriques, on a :

$$v_a(t) = -R_a i_a(t) - \frac{d\psi_a}{dt}$$

- 
1. "f" pour "field winding" en anglais
  2. "d" pour "direct"
  3. "q" pour "quadrature"

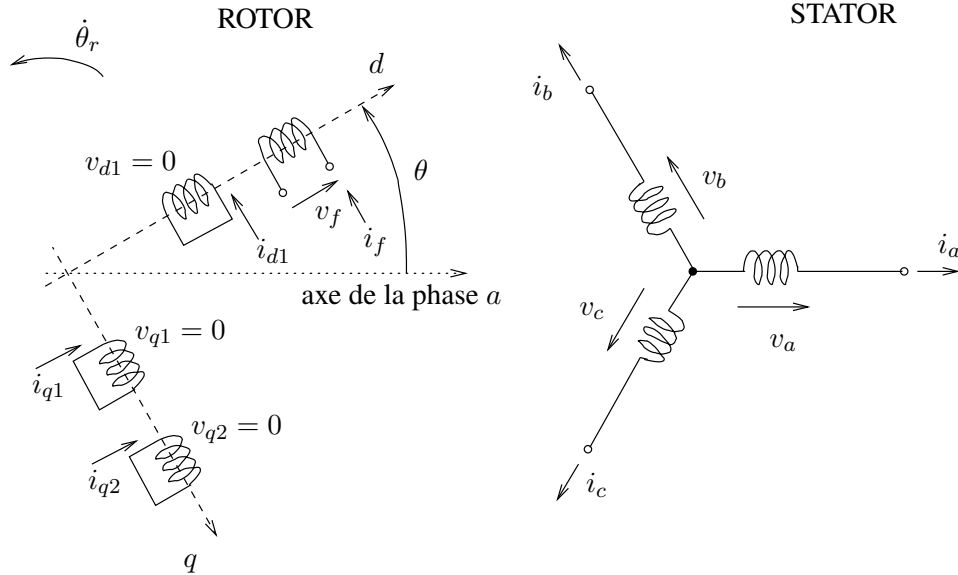


FIGURE 2 – enroulements de la machine synchrone : conventions de signe

$$v_b(t) = -R_a i_b(t) - \frac{d\psi_b}{dt}$$

$$v_c(t) = -R_a i_c(t) - \frac{d\psi_c}{dt}$$

où  $R_a$  est la résistance d'une des phases et  $\psi$  le flux *total* embrassé par l'enroulement considéré.

Ces relations s'écrivent sous forme matricielle :

$$\mathbf{v}_T = -\mathbf{R}_T \mathbf{i}_T - \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_T \quad (1)$$

où l'indice  $T$  désigne des grandeurs triphasées et où l'on a posé  $\mathbf{R}_T = \text{diag}(R_a \ R_a \ R_a)$ .

Pour les enroulements rotoriques on a de même :

$$v_f(t) = R_f i_f(t) + \frac{d\psi_f}{dt} \quad (2)$$

$$0 = R_{d1} i_{d1}(t) + \frac{d\psi_{d1}}{dt} \quad (3)$$

$$0 = R_{q1} i_{q1}(t) + \frac{d\psi_{q1}}{dt} \quad (4)$$

$$0 = R_{q2} i_{q2}(t) + \frac{d\psi_{q2}}{dt} \quad (5)$$

et sous forme matricielle :

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{R}_r \mathbf{i}_r + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_r \quad (6)$$

où l'indice  $r$  désigne des grandeurs rotoriques et où l'on a posé  $\mathbf{R}_r = \text{diag}(R_f \ R_{d1} \ R_{q1} \ R_{q2})$ .

### 1.3 Inductances

Les équations ci-dessus sont tout-à-fait générales ; en particulier, aucune hypothèse n'est faite sur les propriétés du milieu magnétique. Dans ce cours, nous nous limitons toutefois au régime linéaire et négligeons la saturation du matériau magnétique.

Sous cette hypothèse flux et courants sont liés par :

$$\begin{bmatrix} \psi_T \\ \psi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{TT}(\theta_r) & \mathbf{L}_{Tr}(\theta_r) \\ \mathbf{L}_{Tr}^T(\theta_r) & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_T \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} \quad (7)$$

dans laquelle  $\theta_r$  est la position angulaire du rotor, définie par convention comme l'angle entre l'axe direct du rotor et l'axe de la phase  $a$  (voir figures 1 et 2).

Les matrices d'inductances  $\mathbf{L}_{TT}$  et  $\mathbf{L}_{Tr}$  dépendent de la position du rotor. Ce n'est pas le cas de la matrice  $\mathbf{L}_{rr}$  étant donné que, vu du rotor, le stator se présente toujours de la même manière, quelle que soit la position du rotor (on néglige ici l'effet des encoches dans lesquelles sont logés les conducteurs).

Les composantes de  $\mathbf{L}_{TT}(\theta_r)$  et  $\mathbf{L}_{Tr}(\theta_r)$  sont évidemment des fonctions périodiques. Développées en série de Fourier, celles-ci comportent, en principe, des harmoniques spatiaux. Comme mentionné à dans le cours ELEC0014, on s'arrange en pratique pour rendre ces harmoniques aussi faibles que possible. Nous les négligerons donc, ce qui conduit au modèle de *machine sinusoïdale* dans lequel les matrices d'inductances prennent la forme suivante :

$$\mathbf{L}_{TT}(\theta_r) = \begin{bmatrix} L_0 + L_1 \cos 2\theta_r & -L_m - L_1 \cos 2(\theta_r + \frac{\pi}{6}) & -L_m - L_1 \cos 2(\theta_r - \frac{\pi}{6}) \\ -L_m - L_1 \cos 2(\theta_r + \frac{\pi}{6}) & L_0 + L_1 \cos 2(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & -L_m - L_1 \cos 2(\theta_r + \frac{\pi}{2}) \\ -L_m - L_1 \cos 2(\theta_r - \frac{\pi}{6}) & -L_m - L_1 \cos 2(\theta_r + \frac{\pi}{2}) & L_0 + L_1 \cos 2(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{L}_{Tr}(\theta_r) = \begin{bmatrix} L_{af} \cos \theta_r & L_{ad1} \cos \theta_r & L_{aq1} \sin \theta_r & L_{aq2} \sin \theta_r \\ L_{af} \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & L_{ad1} \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & L_{aq1} \sin(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & L_{aq2} \sin(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) \\ L_{af} \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & L_{ad1} \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & L_{aq1} \sin(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & L_{aq2} \sin(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{L}_{rr} = \begin{bmatrix} L_{ff} & L_{fd1} & 0 & 0 \\ L_{fd1} & L_{d1d1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{q1q1} & L_{q1q2} \\ 0 & 0 & L_{q1q2} & L_{q2q2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Dans ces expressions, toutes les constantes  $L$  sont positives, les signes – adéquats ayant été introduits. Partant de la figure 1, ces différentes expressions se justifient comme suit :

- la self-inductance de la phase statorique  $a$  est maximale quand l'axe direct coïncide avec l'axe de cette phase ( $\theta_r = 0$ ). En effet, les lignes de champ (cf cours ELEC0014) trouvent alors le chemin maximal dans le matériau ferromagnétique. Pour la même raison, la self-inductance est minimale quand l'axe en quadrature coïncide avec l'axe de la phase  $a$  ( $\theta_r = \pi/2$ ). Par ailleurs, un retournement de 180 degrés du rotor ne modifie pas cette self-inductance ;
- les self-inductances des phases  $b$  et  $c$  se déduisent de celle de la phase  $a$  en remplaçant  $\theta_r$  par  $\theta_r \pm 2\pi/3$  ;

- l'inductance mutuelle entre deux phases statoriques est maximale quand l'axe direct coïncide avec la bissectrice de l'angle aigu formé par leurs axes. Cette inductance mutuelle est toujours négative car un courant positif  $i_x$  crée dans la phase  $y$  un flux de sens opposé à celui créé par un courant  $i_y$  positif. Ici encore, un retournement du rotor de 180 degrés ne modifie pas cette inductance mutuelle
- l'inductance mutuelle entre un enroulement statorique et un enroulement rotorique est maximale quand ces enroulements sont coaxiaux et nulle quand ils sont perpendiculaires. Un retournement de 180 degrés du rotor change le signe du couplage ;
- le caractère constant des termes de la matrice  $\mathbf{L}_{rr}$  a déjà été justifié ;
- les termes nuls de la matrice  $\mathbf{L}_{rr}$  se justifient par le fait que les enroulements sont perpendiculaires.

De toute évidence, une substitution de ces expressions dans les relations (1, 6) serait très fastidieuse, à cause de la dépendance angulaire. Ceci justifie le recours à de nouvelles variables, plus appropriées que les grandeurs de phase  $i_a, v_a, \dots$ . Ce changement de variables indispensable est la *transformation de Park*<sup>4</sup>.

## 2 Transformation et équations de Park

### 2.1 La transformation de Park

La transformation de Park est définie par une matrice  $\mathcal{P}$  qui s'applique aux grandeurs statoriques pour donner les grandeurs de Park correspondantes, de la manière suivante :

$$\mathbf{v}_P = \mathcal{P} \mathbf{v}_T \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\psi}_P = \mathcal{P} \boldsymbol{\psi}_T \quad (12)$$

$$\mathbf{i}_P = \mathcal{P} \mathbf{i}_T \quad (13)$$

$$\text{où } \mathcal{P} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin \theta_r & \sin(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Les grandeurs vectorielles de Park sont repérées par l'indice  $P$  tandis que les composantes individuelles sont désignées par les indices  $d, q, o$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P &= \begin{bmatrix} v_d & v_q & v_o \end{bmatrix}^T \\ \boldsymbol{\psi}_P &= \begin{bmatrix} \psi_d & \psi_q & \psi_o \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{i}_P &= \begin{bmatrix} i_d & i_q & i_o \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

On montre aisément que :

$$\mathcal{P} \mathcal{P}^T = \mathbf{I}$$

---

4. du nom de son auteur. La transformation utilisée ici est une variante de celle proposée originellement par Park. Elle est plus simple, conserve les puissances et la symétrie des matrices d'inductance. Certains auteurs font référence à Blondel plutôt qu'à Park

où  $\mathbf{I}$  est la matrice unité. Il en résulte que :

$$\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}^T \quad (15)$$

La matrice de transformation  $\mathcal{P}$  est donc orthogonale.

La transformation des variables  $T$  en variables  $P$  reçoit l'interprétation suivante.

Le courant  $i_a$  qui parcourt la phase  $a$  crée un champ magnétique d'amplitude  $k i_a$  dirigé selon l'axe de la bobine  $a$ . De même, les champs créés par les courants  $i_b$  et  $i_c$  sont dirigés selon les axes des enroulements  $b$  et  $c$ . La projection sur l'axe  $d$  du champ total vaut :

$$k \left( \cos \theta_r i_a + \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) i_b + \cos\left(\theta_r - \frac{4\pi}{3}\right) i_c \right) = k \sqrt{\frac{3}{2}} i_d$$

et la projection sur l'axe  $q$  :

$$k \left( \sin \theta_r i_a + \sin\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) i_b + \sin\left(\theta_r - \frac{4\pi}{3}\right) i_c \right) = k \sqrt{\frac{3}{2}} i_q$$

Considérons à présent deux enroulements fictifs  $d$  et  $q$ , situés respectivement sur l'axe direct et sur l'axe en quadrature (et tournant donc avec le rotor). Le courant  $i_d$  produit un champ magnétique dirigé selon l'axe  $d$  et d'amplitude  $k' i_d$  tandis que le courant  $i_q$  produit un champ d'amplitude  $k' i_q$  et dirigé selon l'axe  $q$ . Les relations ci-dessus montrent qu'à condition d'admettre que  $k' = k \sqrt{3/2}$ , les enroulements fictifs  $d$  et  $q$ , solidaires du rotor, produisent le même effet que les enroulements statoriques  $a, b$  et  $c$ .

On peut également considérer un enroulement fictif  $o$ , qui n'est pas couplé aux deux autres. Notons au passage que cet enroulement n'est parcouru par un courant qu'en cas de régime déséquilibré.

Après application de la transformation de Park, les enroulements de la machine synchrone sont ceux représentés à la figure 3.

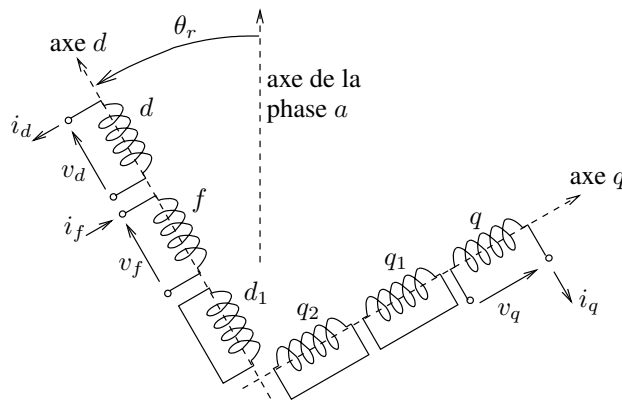


FIGURE 3 – enroulements de la machine synchrone après transformation de Park ( $o$  non montré)

## 2.2 Equations de Park de la machine synchrone

Partant de (1), on a successivement :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_T &= -\mathbf{R}_T \mathbf{i}_T - \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_T \\
 \mathcal{P}^{-1} \mathbf{v}_P &= -R_a \mathbf{I} \mathcal{P}^{-1} \mathbf{i}_P - \frac{d}{dt} (\mathcal{P}^{-1} \boldsymbol{\psi}_P) \\
 \mathbf{v}_P &= -R_a \mathcal{P} \mathcal{P}^{-1} \mathbf{i}_P - \mathcal{P} \left( \frac{d}{dt} \mathcal{P}^{-1} \right) \boldsymbol{\psi}_P - \mathcal{P} \mathcal{P}^{-1} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_P \\
 \mathbf{v}_P &= -\mathbf{R}_P \mathbf{i}_P - \dot{\theta}_r \mathbf{P} \boldsymbol{\psi}_P - \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_P
 \end{aligned} \tag{16}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_P &= \mathbf{R}_T \\
 \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$\mathbf{P}$  est un opérateur de rotation de 90 degrés dans le plan  $(d, q)$ .

Rappelons que la transformation de Park ne s'applique qu'au stator. Le rotor reste décrit par l'équation (6).

En détaillant (16), on trouve aisément les *équations de Park* :

$$v_d = -R_a i_d - \dot{\theta}_r \psi_q - \frac{d\psi_d}{dt} \tag{17}$$

$$v_q = -R_a i_q + \dot{\theta}_r \psi_d - \frac{d\psi_q}{dt} \tag{18}$$

$$v_o = -R_a i_o - \frac{d\psi_o}{dt} \tag{19}$$

dans lesquelles les termes du type  $\dot{\theta}_r \psi$  sont appelés *forces électromotrices de rotation* et les termes en  $d\psi/dt$  *forces électromotrices de transformation*.

## 2.3 Matrice des inductances de Park

Partant de (7), on a successivement :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_T \\ \boldsymbol{\psi}_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{TT} & \mathbf{L}_{Tr} \\ \mathbf{L}_{Tr}^T & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_T \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \mathcal{P}^{-1} \boldsymbol{\psi}_P \\ \boldsymbol{\psi}_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{TT} & \mathbf{L}_{Tr} \\ \mathbf{L}_{Tr}^T & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}^{-1} \mathbf{i}_P \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_P \\ \boldsymbol{\psi}_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathcal{P} \mathbf{L}_{TT} \mathcal{P}^{-1} & \mathcal{P} \mathbf{L}_{Tr} \\ \mathbf{L}_{Tr}^T \mathcal{P}^{-1} & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_P \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$





$$\begin{bmatrix} v_q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_a & & \\ & R_{q1} & \\ & & R_{q2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_q \\ i_{q1} \\ i_{q2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}_r \psi_d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_q \\ \psi_{q1} \\ \psi_{q2} \end{bmatrix} \quad (22)$$

avec les relations flux-courants :

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_f \\ \psi_{d1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{dd} & L_{df} & L_{dd1} \\ L_{df} & L_{ff} & L_{fd1} \\ L_{dd1} & L_{fd1} & L_{d1d1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_f \\ i_{d1} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_q \\ \psi_{q1} \\ \psi_{q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{qq} & L_{qq1} & L_{qq2} \\ L_{qq1} & L_{q1q1} & L_{q1q2} \\ L_{qq2} & L_{q1q2} & L_{q2q2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_q \\ i_{q1} \\ i_{q2} \end{bmatrix} \quad (24)$$

### 3 Energie, puissance et couple

#### 3.1 Expression du couple électromagnétique

Nous allons à présent établir l'expression du couple électromagnétique  $T_e$ , en utilisant les équations (17-19) et en exprimant le bilan de puissance du stator et du rotor, respectivement.

Le bilan de puissance au stator de la machine s'écrit :

$$p_T + p_{J_s} + \frac{dW_{ms}}{dt} = p_{r \rightarrow s} \quad (25)$$

où  $p_T$  la puissance instantanée sortant du stator,  $p_{J_s}$  les pertes Joule statoriques,  $W_{ms}$  l'énergie magnétique emmagasinée dans les enroulements statoriques et  $p_{r \rightarrow s}$  la puissance transférée du rotor au stator. A ce stade, nous ne connaissons pas encore la nature de  $p_{r \rightarrow s}$  (puissance mécanique et/ou électrique ?).

La puissance instantanée sortant du stator vaut :

$$p_T(t) = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = \mathbf{v}_T^T \mathbf{i}_T = \mathbf{v}_P^T \mathcal{P} \mathcal{P}^T \mathbf{i}_P = \mathbf{v}_P^T \mathbf{i}_P = v_d i_d + v_q i_q + v_o i_o$$

Ce résultat montre que la transformation de Park conserve la puissance : les enroulements  $(d, q, o)$  produisent la même puissance que les enroulements statoriques  $(a, b, c)$ .

En remplaçant les tensions par leurs expressions (17-19), l'expression ci-dessus devient :

$$p_T(t) = - \underbrace{(R_a i_d^2 + R_a i_q^2 + R_a i_o^2)}_{p_{J_s}} - \underbrace{(i_d \frac{d\psi_d}{dt} + i_q \frac{d\psi_q}{dt} + i_o \frac{d\psi_o}{dt})}_{dW_{ms}/dt} + \dot{\theta}_r (\psi_d i_q - \psi_q i_d) \quad (26)$$

Une comparaison avec (25) fournit directement l'expression de la puissance transférée du rotor au stator :

$$p_{r \rightarrow s} = \dot{\theta}_r (\psi_d i_q - \psi_q i_d) \quad (27)$$

Considérons à présent le bilan de puissance du rotor :

$$P_m + p_f = p_{Jr} + \frac{dW_{mr}}{dt} + p_{r \rightarrow s} + \frac{dW_c}{dt} \quad (28)$$

où  $P_m$  est la puissance mécanique fournie par la turbine,  $p_f$  la puissance électrique fournie à l'enroulement d'excitation,  $p_{Jr}$  les pertes Joule rotoriques,  $W_{mr}$  l'énergie magnétique dans les enroulements rotoriques et  $W_c$  l'énergie cinétique des masses tournantes.

La puissance  $p_f$  vaut  $p_f = v_f i_f$  mais comme  $v_{d1} = v_{q1} = v_{q2} = 0$  on peut encore écrire :

$$p_f = v_f i_f + v_{d1} i_{d1} + v_{q1} i_{q1} + v_{q2} i_{q2}$$

et en remplaçant les tensions par leurs expressions (2-5) :

$$p_f = \underbrace{(R_f i_f^2 + R_{d1} i_{d1}^2 + R_{q1} i_{q1}^2 + R_{q2} i_{q2}^2)}_{p_{Jr}} + \underbrace{i_f \frac{d\psi_f}{dt} + i_{d1} \frac{d\psi_{d1}}{dt} + i_{q1} \frac{d\psi_{q1}}{dt} + i_{q2} \frac{d\psi_{q2}}{dt}}_{dW_{mr}/dt}$$

En tenant compte de cette dernière relation et de (27), le bilan de puissance (28) devient simplement :

$$P_m - \frac{dW_c}{dt} = \dot{\theta}_r (\psi_d i_q - \psi_q i_d) \quad (29)$$

Considérons enfin l'équation du mouvement du rotor :

$$\mathcal{I} \frac{d^2 \theta_r}{dt^2} = T_m - T_e \quad (30)$$

où  $\mathcal{I}$  est le moment d'inertie des masses tournantes,  $T_m$  est le couple mécanique appliqué par la turbine et  $T_e$  est le couple électromagnétique. En multipliant cette dernière équation par  $\dot{\theta}_r$  on obtient :

$$\mathcal{I} \dot{\theta}_r \ddot{\theta}_r = \dot{\theta}_r T_m - \dot{\theta}_r T_e \quad (31)$$

ou encore :

$$\frac{dW_c}{dt} = P_m - \dot{\theta}_r T_e \quad (32)$$

où  $P_m$  est la puissance mécanique communiquée par la turbine. Une comparaison de cette relation avec (29) donne directement l'expression (particulièrement simple !) du couple électromagnétique :

$$T_e = \psi_d i_q - \psi_q i_d \quad (33)$$

A posteriori, nous voyons que la puissance transmise du rotor au stator est exclusivement de nature mécanique.

## 3.2 Composantes du couple

En remplaçant les flux par leurs expressions tirées de (23, 24), la relation (33) devient :

$$T_e = L_{dd}i_d i_q + L_{df}i_f i_q + L_{dd1}i_{d1}i_q - L_{qq}i_q i_d - L_{qq1}i_{q1}i_d - L_{qq2}i_{q2}i_d$$

On peut distinguer trois composantes dans le couple :

$$T_{e1} = (L_{dd} - L_{qq}) i_d i_q \quad (34)$$

Cette composante n'existe que dans une machine à pôles saillants. Elle correspond au fait que, *même sans excitation* ( $i_f = 0$ ), le rotor tend à aligner son axe direct sur le champ magnétique tournant créé par le stator, ce qui crée un certain couple. Dans cette position, les lignes du champ statorique passent au maximum dans le milieu ferromagnétique et au minimum dans l'entrefer. En d'autres termes, le rotor tend à se positionner de manière à minimiser la reluctance offerte au champ statorique.  $T_{e1}$  est appelé *couple synchrone reluctant*<sup>5</sup>. Il est d'autant plus élevé que la *saillance* est marquée, c'est-à-dire que  $L_{dd}$  diffère fortement de  $L_{qq}$  ;

$$T_{e2} = L_{dd1}i_{d1}i_q - L_{qq1}i_{q1}i_d - L_{qq2}i_{q2}i_d \quad (35)$$

Cette composante est nulle en régime établi, car tous les courants d'amortisseurs sont nuls, comme mentionné précédemment.  $T_{e2}$  est un couple d'amortissement ;

$$T_{e3} = L_{df}i_f i_q \quad (36)$$

Cette composante, la seule dépendant du courant d'excitation, constitue la majeure partie du couple en régime établi. En régime établi,  $i_f$  est constant et  $T_{e3}$  est le *couple synchrone dû à l'excitation*. En régime perturbé, une composante dynamique de  $i_f$  apparaît, du même type que les courants d'amortisseurs, et une partie de  $T_{e3}$  contribue au couple d'amortissement total.

**Remarque.** Dans le cas d'une machine à  $p$  paires de pôles, la vitesse de rotation est  $\dot{\theta}_r/p$  et la puissance transmise sous forme de couple est  $\dot{\theta}_r T_e/p$ . Le couple électromagnétique vaut donc :

$$T_e = p (\psi_d i_q - \psi_q i_d) \quad (37)$$

## 4 La machine synchrone en régime établi

Après avoir établi le modèle dynamique général, nous considérons le cas particulier d'une machine :

- dont le stator est parcouru par des courants triphasés équilibrés, de pulsation  $\omega_N = 2\pi f_N$
- dont l'enroulement d'excitation est soumis à une tension continue  $V_f$  et est parcouru par un courant continu

$$i_f = \frac{V_f}{R_f} \quad (38)$$

---

5. ce type de couple est à la base du moteur "à reluctance" utilisé dans les applications de positionnement

- tournant à la vitesse de synchronisme :

$$\theta_r = \theta_r^o + \omega_N t \quad (39)$$

Pour des raisons déjà mentionnées, on a :

$$i_{d1} = i_{q1} = i_{q2} = 0 \quad (40)$$

## 4.1 Fonctionnement à vide

Le stator étant ouvert, on a évidemment :

$$i_a = i_b = i_c = 0$$

Il en résulte que :

$$i_d = i_q = i_o = 0$$

et pour les flux :

$$\begin{aligned} \psi_d &= L_{df} i_f \\ \psi_q &= 0 \end{aligned}$$

Les équations de Park s'écrivent :

$$\begin{aligned} v_d &= 0 \\ v_q &= \omega_N \psi_d = \omega_N L_{df} i_f \end{aligned}$$

En repassant aux grandeurs statoriques par la transformation de Park inverse, on trouve, pour la phase  $a$  par exemple :

$$v_a(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \omega_N L_{df} i_f \sin(\theta_r^o + \omega_N t) = \sqrt{2} E_q \sin(\theta_r^o + \omega_N t)$$

où :

$$E_q = \frac{\omega_N L_{df} i_f}{\sqrt{3}} \quad (41)$$

est une force électromotrice proportionnelle au courant d'excitation. C'est aussi la tension apparaissant aux bornes de la machine à vide.

## 4.2 Fonctionnement en charge

Considérons à présent le régime défini par :

$$\begin{aligned} v_a(t) &= \sqrt{2} V \cos(\omega_N t + \theta) \\ v_b(t) &= \sqrt{2} V \cos(\omega_N t + \theta - \frac{2\pi}{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_c(t) &= \sqrt{2}V \cos(\omega_N t + \theta + \frac{2\pi}{3}) \\
i_a(t) &= \sqrt{2}I \cos(\omega_N t + \psi) \\
i_b(t) &= \sqrt{2}I \cos(\omega_N t + \psi - \frac{2\pi}{3}) \\
i_c(t) &= \sqrt{2}I \cos(\omega_N t + \psi + \frac{2\pi}{3})
\end{aligned}$$

en plus des équations (38, 39 et 40), toujours d'application. On en déduit successivement :

$$\begin{aligned}
i_d &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{2}I [\cos(\theta_r^o + \omega_N t) \cos(\omega_N t + \psi) + \cos(\theta_r^o + \omega_N t - \frac{2\pi}{3}) \cos(\omega_N t + \psi - \frac{2\pi}{3}) \\
&\quad + \cos(\theta_r^o + \omega_N t + \frac{2\pi}{3}) \cos(\omega_N t + \psi + \frac{2\pi}{3})] \\
&= \frac{I}{\sqrt{3}} [\cos(\theta_r^o + 2\omega_N t + \psi) + \cos(\theta_r^o + 2\omega_N t + \psi - \frac{4\pi}{3}) + \cos(\theta_r^o + 2\omega_N t + \psi + \frac{4\pi}{3}) \\
&\quad + 3 \cos(\theta_r^o - \psi)] = \sqrt{3}I \cos(\theta_r^o - \psi) \tag{42}
\end{aligned}$$

et par un calcul semblable :

$$i_q = \sqrt{3}I \sin(\theta_r^o - \psi) \tag{43}$$

$$i_o = 0$$

$$v_d = \sqrt{3}V \cos(\theta_r^o - \theta) \tag{44}$$

$$v_q = \sqrt{3}V \sin(\theta_r^o - \theta) \tag{45}$$

$$v_o = 0$$

En régime triphasé équilibré, les courants  $i_d$  et  $i_q$  sont donc constants. Ce résultat est conforme à l'interprétation de la transformation de Park. En effet, en régime établi, le champ statorique est fixe par rapport au rotor. Pour produire un tel champ avec les enroulements fictifs  $d$  et  $q$ , il faut injecter dans ces derniers des courants continus.

Les flux dans les enroulements  $d$  et  $q$  sont également constants et valent :

$$\psi_d = L_{dd}i_d + L_{df}i_f$$

$$\psi_q = L_{qq}i_q$$

L'expression (33) montre dès lors que le couple électromagnétique est également constant en régime établi. C'est un avantage supplémentaire important du système triphasé. En effet, au niveau de l'usure mécanique, on préfère que le couple appliqué au rotor d'une machine tournante soit constant, au lieu, par exemple, de présenter une composante alternative.

Les équations de Park (17 -19) s'écrivent :

$$v_d = -R_a i_d - \omega_N L_{qq} i_q = -R_a i_d - X_q i_q \tag{46}$$

$$v_q = -R_a i_q + \omega_N L_{dd} i_d + \omega_N L_{df} i_f = -R_a i_q + X_d i_d + \sqrt{3}E_q \tag{47}$$

$$v_o = 0$$

La réactance  $X_d = \omega_N L_{dd}$  (resp.  $X_q = \omega_N L_{qq}$ ) est appelée *réactance synchrone dans l'axe direct* (resp. *dans l'axe en quadrature*). Ces deux réactances sont des paramètres importants de la machine synchrone. Dans le cas d'une machine à rotor lisse, elles sont égales :  $X_d = X_q$ .

Notons que la relation (47) fait apparaître la f.e.m.  $E_q$  définie à la section précédente.

Montrons à présent que le fonctionnement de la machine peut être décrit par un diagramme de phaseur relativement simple.

Etant donné que le rotor de la machine tourne à la vitesse angulaire  $\omega_N$ , il est possible de représenter sur une même figure les vecteurs tournants relatifs aux grandeurs sinusoïdales et les axes  $d$  et  $q$  de la machine, à condition de choisir correctement la référence des angles. Un tel diagramme est représenté à la figure 4. Cette figure montre le diagramme de phaseur à  $t = 0$ . L'axe horizontal représente à la fois l'axe sur lequel on projette les vecteurs tournants pour retrouver l'évolution temporelle des grandeurs sinusoïdales et l'axe par rapport auquel on mesure la position du rotor, c'est-à-dire l'axe de la phase  $a$ . L'angle entre cet axe horizontal et l'axe direct est donc la valeur en  $t = 0$  de l'angle  $\theta_r$ , soit  $\theta_r^o$ .

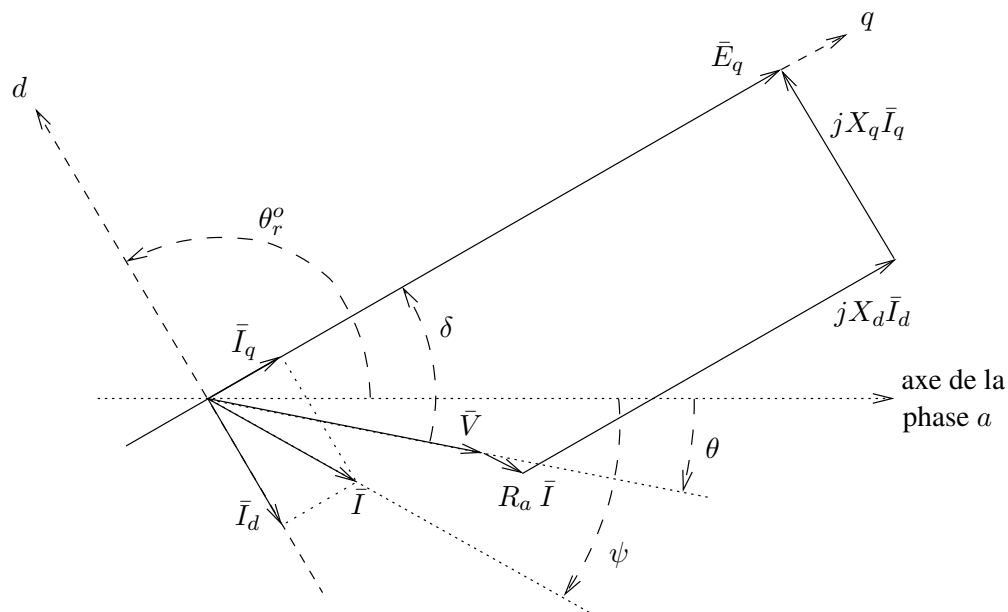


FIGURE 4 – diagramme de phaseur de la machine synchrone en régime établi

En introduisant les relations (42-45) dans (46, 47), on obtient :

$$\begin{aligned} V \cos(\theta_r^o - \theta) &= -R_a I \cos(\theta_r^o - \psi) - X_q I \sin(\theta_r^o - \psi) \\ V \sin(\theta_r^o - \theta) &= -R_a I \sin(\theta_r^o - \psi) + X_d I \cos(\theta_r^o - \psi) + E_q \end{aligned}$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier à partir de la figure 4, que ces deux équations sont en fait les projections sur les axes  $d$  et  $q$  de l'équation complexe :

$$\bar{E}_q = \bar{V} + R_a \bar{I} + jX_d \bar{I}_d + jX_q \bar{I}_q \quad (48)$$

dans laquelle  $\bar{E}_q$  est un vecteur dirigé selon l'axe  $q$  et  $\bar{I}_d$  (resp.  $\bar{I}_q$ ) est la projection de  $\bar{I}$  sur l'axe  $d$  (resp.  $q$ ). On a donc :

$$\bar{E}_q = E_q e^{j(\theta_r^o - \frac{\pi}{2})}$$

$$\begin{aligned}\bar{I}_d &= I \cos(\theta_r^\circ - \psi) e^{j\theta_r^\circ} = \frac{i_d}{\sqrt{3}} e^{j\theta_r^\circ} \\ \bar{I}_q &= I \sin(\theta_r^\circ - \psi) e^{j(\theta_r^\circ - \frac{\pi}{2})} = -j \frac{i_q}{\sqrt{3}} e^{j\theta_r^\circ}\end{aligned}$$

avec :

$$\bar{I} = \bar{I}_d + \bar{I}_q = \left( \frac{i_d}{\sqrt{3}} - j \frac{i_q}{\sqrt{3}} \right) e^{j\theta_r^\circ} \quad (49)$$

Dans le cas d'une machine à rotor lisse,  $X_d = X_q = X$  et (48) devient simplement :

$$\bar{E}_q = \bar{V} + R_a \bar{I} + jX(\bar{I}_d + \bar{I}_q) = \bar{V} + R_a \bar{I} + jX \bar{I} \quad (50)$$

Il y correspond le schéma équivalent de la figure 5. Notons qu'il n'est pas possible de construire un tel schéma équivalent dans le cas d'une machine à pôles saillants.

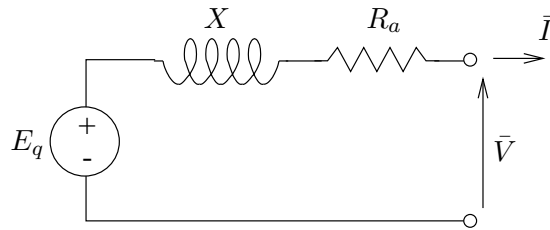


FIGURE 5 – schéma équivalent d'une machine à rotor lisse en régime établi

### 4.3 Puissances

Comme pour le courant, définissons les projections du phaseur  $\bar{V}$  :

$$\bar{V}_d = V \cos(\theta_r^\circ - \theta) e^{j\theta_r^\circ} = \frac{v_d}{\sqrt{3}} e^{j\theta_r^\circ} \quad (51)$$

$$\bar{V}_q = V \sin(\theta_r^\circ - \theta) e^{j(\theta_r^\circ - \frac{\pi}{2})} = -j \frac{v_q}{\sqrt{3}} e^{j\theta_r^\circ} \quad (52)$$

avec :

$$\bar{V} = \bar{V}_d + \bar{V}_q = \left( \frac{v_d}{\sqrt{3}} - j \frac{v_q}{\sqrt{3}} \right) e^{j\theta_r^\circ} \quad (53)$$

La puissance complexe fournie par la machine vaut :

$$S = 3\bar{V}\bar{I}^* = 3 \left( \frac{v_d}{\sqrt{3}} - j \frac{v_q}{\sqrt{3}} \right) \left( \frac{i_d}{\sqrt{3}} + j \frac{i_q}{\sqrt{3}} \right) = (v_d - j v_q)(i_d + j i_q)$$

dont on tire directement :

$$P = v_d i_d + v_q i_q \quad (54)$$

$$Q = v_d i_q - v_q i_d \quad (55)$$



Il est fort utile d'établir les expressions des puissances active et réactive en fonction de la tension  $V$ , de la f.e.m.  $E_q$  et de l'angle interne  $\delta$  de la machine (cf figure 4). Pour ce faire, nous négligerons la résistance statorique  $R_a$ , qui, en pratique, est très faible devant  $X_d$  et  $X_q$ .

Sous cette hypothèse, les équations (46, 47) deviennent :

$$\begin{aligned} v_d &= -X_q i_q \Rightarrow i_q = -\frac{v_d}{X_q} \\ v_q &= X_d i_d + \sqrt{3}E_q \Rightarrow i_d = \frac{v_q - \sqrt{3}E_q}{X_d} \end{aligned}$$

tandis que l'on tire de la figure 4 et de (51, 52) :

$$\begin{aligned} v_d &= -\sqrt{3}V \sin \delta \\ v_q &= \sqrt{3}V \cos \delta \end{aligned}$$

Une substitution de toutes ces relations dans (54, 55) fournit les expressions recherchées :

$$P = 3 \frac{E_q V}{X_d} \sin \delta + \frac{3V^2}{2} \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin 2\delta \quad (56)$$

$$Q = 3 \frac{E_q V}{X_d} \cos \delta - 3V^2 \left( \frac{\sin^2 \delta}{X_q} + \frac{\cos^2 \delta}{X_d} \right) \quad (57)$$

qui, dans le cas d'une machine à rotor lisse, deviennent évidemment :

$$P = 3 \frac{E_q V}{X} \sin \delta \quad (58)$$

$$Q = 3 \frac{E_q V}{X} \cos \delta - 3 \frac{V^2}{X} \quad (59)$$

## 5 Valeurs nominales, système per unit et ordres de grandeur

### 5.1 Stator

Au stator, une machine synchrone est caractérisée par trois grandeurs nominales :

- la tension nominale  $U_N$ . C'est la tension pour laquelle la machine a été conçue. Un écart de quelques pour-cents par rapport à  $U_N$  est admissible ;
- le courant nominal  $I_N$ . C'est le courant maximal permanent pour lequel la section des enroulements statoriques a été prévue ;
- la puissance apparente nominale  $S_N$ . Il s'agit de la puissance triphasée liée aux grandeurs précédentes par :

$$S_N = \sqrt{3}U_N I_N$$

La conversion des paramètres de la machine en valeurs unitaires se fait comme expliqué dans le cours ELEC0014. On choisit la puissance de base  $S_B = S_N$  et la tension de base  $V_B = U_N/\sqrt{3}$ . On en déduit le courant de base  $I_B = S_N/3V_B$  et l'impédance de base  $Z_B = 3V_B^2/S_B$ .

Le tableau ci-après donne les ordres de grandeur des paramètres  $R_a$ ,  $X_d$  et  $X_q$ , pour des machines d'une puissance supérieure à 100 MVA. Ces valeurs s'entendent dans la base de la machine, telle que définie plus haut.

	machines à	
	rotor lisse	pôles saillants
résistance $R_a$	0.005 pu	
réactance dans l'axe direct $X_d$	1.5 - 2.5 pu	0.9 - 1.5 pu
réactance dans l'axe en quadrature $X_q$	1.5 - 2.5 pu	0.5 - 1.1 pu

Comme on le sait, après passage en per unit, le coefficient 3 disparaît des formules (56 - 59) donnant la puissance triphasée.

## 5.2 Enroulements de Park

Nous avons montré que des grandeurs telles que  $v_d, v_q, i_d, i_q, \dots$  se rapportent à des enroulements fictifs  $d$  et  $q$  solidaires du rotor. On peut également utiliser le système per unit dans ces enroulements. A cette fin, nous prenons dans chacun :

- comme puissance de base :  $S_N$ , afin de conserver la symétrie de la matrice d'inductance (cf cours ELEC0014);
- comme tension de base :  $\sqrt{3}V_B$ , pour la raison expliquée ci-après

On en déduit le courant de base :

$$\frac{S_N}{\sqrt{3}V_B} = \sqrt{3}I_B$$

expression correspondant à un enroulement monophasé (et non triphasé).

Ce choix permet quelques simplifications confortables des relations établies à la section 4. Ainsi, par exemple, la relation (42) devient en per unit :

$$i_{dpu} = \frac{i_d}{\sqrt{3}I_B} = \frac{\sqrt{3} I}{\sqrt{3} I_B} \cos(\theta_r^o - \psi) = I_{pu} \cos(\theta_r^o - \psi)$$

De même, les relations (43, 44 et 45) deviennent :

$$\begin{aligned} i_{qpu} &= I_{pu} \sin(\theta_r^o - \psi) \\ v_{dpu} &= V_{pu} \cos(\theta_r^o - \theta) \\ v_{qpu} &= V_{pu} \sin(\theta_r^o - \theta) \end{aligned}$$

tandis que (49) et (53) s'écrivent à présent :

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \bar{I}_d + \bar{I}_q = (i_d - j i_q)e^{j\theta_r^o} \\ \bar{V} &= \bar{V}_d + \bar{V}_q = (v_d - j v_q)e^{j\theta_r^o} \end{aligned}$$

On voit qu'en per unit tous les coefficients  $\sqrt{3}$  disparaissent et que les courants (resp. tensions) de Park sont directement les projections du vecteur  $\bar{I}$  (resp.  $\bar{V}$ ) sur les axes  $d$  et  $q$  de la machine.

### **5.3 Enroulements rotoriques**

Dans les études dynamiques détaillées, on met également en per unit les grandeurs relatives à chaque enroulement rotorique. Nous ne détaillerons pas ici cette opération, qui n'est pas requise pour l'analyse du régime établi.